SIGNAUX ET SYSTEMES NON LINEAIRES

Définitions

Un système est non linéaire s'il n'obéit pas au principe de superposition. Il s'agit d'une définition négative qui autorise un grand nombre de non linéarités. Nous citerons :

- Les systèmes paramétriques : la fonction de transfert est fonction du signal .C'est le cas des circuits contenant une thermistance ou un varactor .
- Les systèmes à hystérésis , type relais ou trigger de Schmitt. Le calcul de leurs performances en présence de bruit est très complexe.
- Les systèmes à non linéarité indépendante du temps , type y=f(x) .Ce sont les seuls qui sont abordables de façon un peu générale et encore dans la cas limitatif d'un signal d'entrée gaussien .

Propriétés particulières d'un signal Gaussien

Considérons un ensembles de variables aléatoires gaussiennes de moyenne nulle

$$\overline{x_i} = E(x_i) = 0$$

Le coefficient de corrélation entre deux de ces variables est défini comme $R_{ij} = \overline{x_i . x_j}$, s'il est nul on dira que les variables ne sont pas corrélées. Attention non corrélation ne veut pas dire indépendance . Par exemple cosΩt et sinΩt pour Ω aléatoire ne sont évidemment pas indépendante mais cependant leur produit est de moyenne nulle .

Pour trois variables la moyenne du produit est toujours nul.

$$\overline{x_i . x_k . x_L} = 0$$

C'est une propriété essentielle des variables gaussiennes qui est utilisée parfois pour les caractériser . (recherche de composants défectueux dont le bruit propre n'est pas gaussien par tri corrélation)

Pour 4 variables on retrouve un résultat non nul , on peut montrer que pour une gaussienne (et seulement dans ce cas) :

$$\overline{x_1 . x_2 . x_3 . x_4} = \overline{x_1 . x_2} . \overline{x_3 . x_4} + \overline{x_1 . x_3} . \overline{x_2 . x_4} + \overline{x_1 . x_4} . \overline{x_2 . x_3}$$

La moyenne est cassée en trois coefficients de corrélation pour lesquels les indices prennent toutes les positions possibles .

Ce résultat se généralise pour un nombre pair quelconque de variables :

$$\overline{x_1 . x_2 .....x_{2n}} = \sum \overline{x_1 x_2} . \overline{x_3 x_4} .... \overline{x_{2n-1} x_{2n}}$$

Il y a autant de termes que de permutations possibles des indices soit $[(2n-1)(2n-3)(2n-5).....1]$

C'est à dire 3 pour 2n=4
15 pour 2n=6
105 pour 2n=8 etc…

Pour un nombre impair de variables la moyenne est nulle

$$\overline{x_1 . x_2 .....x_{2n} x_{2n+1}} = 0$$

Le quadrateur

C'est l'exemple le plus simple et le plus courant. Il s'agit d'un système à non linéarité indépendante du temps (système amnésique) défini par :

$$y = \frac{A}{1v} . x^2$$

Pour que le résultat y ait les dimensions d'une tension (si x est une tension) il faut que le coefficient multiplicatif soit l'inverse d'une tension c'est pourquoi nous l'avons noté (provisoirement) A/1v

Pour un signal d'entrée déterministe le calcul du signal de sortie ne présente aucune difficulté, par exemple pour un signal d'entrée sinusoïdal ce circuit est doubleur de tension . Mais pour un signal aléatoire le seul recours est le théorème de Wiener Kintchine .

Cas d'un signal d'entrée aléatoire gaussien

La fonction d'autocorrélation de y est :

$$R_y(\tau) = \overline{y(t).y(t-\tau)}$$

pour alléger la notation nous poserons y(t-τ)=y' Alors en vertu du théorème précédent , **si x est gaussien** :

$$R_y(\tau) = \overline{Ax^2 Ax'^2} = A^2\,\overline{x.x.x'.x'} = A^2[\overline{x.x}.\overline{x'.x'} + \overline{x.x'}.\overline{x.x'} + \overline{x.x'}.\overline{x.x'}]$$

C'est à dire en posant $\overline{x^2} = \sigma_x^2$

$$R_y(\tau) = A^2\left[\sigma_X^4 + 2R_X^2(\tau)\right]$$

Le théorème de Wiener Kintchine nous fournit alors par transformée de Fourier le spectre de puissance :

$$S_Y(f) = A^2.\left[\sigma_X^4.\delta(f) + 2S_X(f)\otimes S_X(f)\right]$$

Pour visualiser le résultat nous étudierons d'abord le cas d'un bruit blanc filtré passe bas .

Dans ce cas comme nous l'avons vu plus haut la puissance est

$$\sigma_X^2 = 2Bf_C \quad d'ou \quad B = \frac{\sigma_X^2}{2f_C}$$

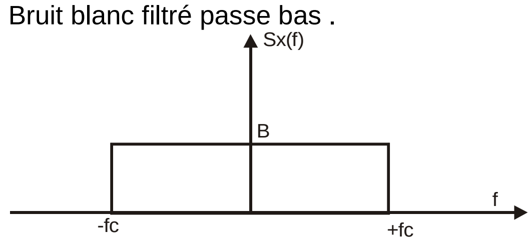
Le premier termes de l'expression précédente est un dirac à l'origine, c'est la tension continue obtenue par redressement .

Pour le second il faut calculer le produit de convolution . $\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(u).S_x(f-u)du$

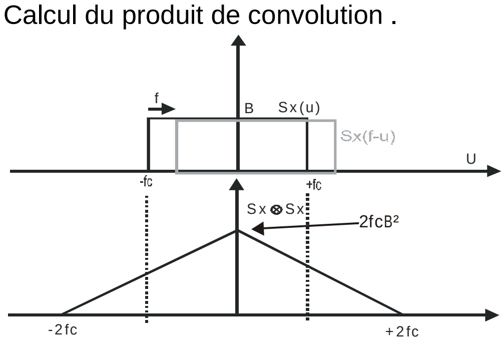
Le calcul peut être fait graphiquement en faisant glisser deux rectangles l'un sur l'autre

D'ou le spectre du signal y :

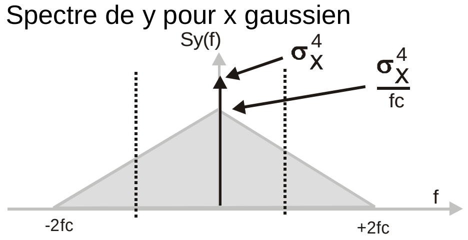
Bruit blanc filtré passe bas .



Calcul du produit de convolution .



Spectre de y pour x gaussien



Si le signal d'entrée n'est pas gaussien ce résultat n'est plus exact, c'est en particulier le cas courant d'un signal sinusoïdal superposé à un bruit gaussien .

Signal sinusoïdal plus bruit gaussien

Le signal sinusoïdal s=a.cos(2πft) donne évidemment en sortie

$$y = A^2\left[\frac{a^2}{2} + \frac{a^2.\cos(2\pi.2\,ft)}{2}\right]$$

c'est à dire un Dirac à l'origine d'amplitude A²a²/2 et deux raies pour ±2f .Mais le spectre complet n'est pas la somme des contributions individuelles de s et du bruit gaussien car le système n'obéit pas au principe de superposition, il faut effectuer le calcul complet .

$y = A.x^2$ avec x=s+b b étant le bruit aléatoire .

$$y = A.(s+b)^2$$

avec la notation précédente :

$$R_Y(\tau) = A^2\left[\overline{(s+b)^2.(s'+b')^2}\right] = A^2.\left[\overline{(s^2+2sb+b^2).(s'^2+2s'b'+b'^2)}\right]$$

soit 9 termes qu'il est facile de calculer :

$$A^2\begin{cases}\overline{s^2s'^2} = \overline{(a^2\cos^2(\omega_0 t).a^2\cos^2(\omega_0(t-\tau)))} = \dfrac{a^4}{4}(1+\cos 2\omega_0\tau)\\ \overline{2s'b's^2} = \overline{2s's'^2}.\overline{b'} = 0 \quad \textit{car le bruit est de moyenne nulle}\\ \overline{s^2b'^2} = \overline{s^2}.\overline{b'^2} = \dfrac{a^2}{2}\sigma_B^2 \quad \textit{signal et bruit indépendants}\\ \overline{2sbs'^2} = 0\\ 4\overline{ss'bb'} = 4\overline{ss'}.\overline{bb'} = 4(\dfrac{a^2}{2}.\cos\omega_0\tau).R_B(\tau)\\ \overline{2sbb'^2} = 0\\ \overline{b^2s'^2} = \dfrac{a^2}{2}\sigma_B^2\\ \overline{b^2 2s'b'} = 0\\ \overline{b^2b'^2} = \sigma_B^4 + 2R_B^2(\tau) \quad \textit{résultat} \quad \textit{précédent}\end{cases}$$

Soit en regroupant les termes :

$$R_Y(\tau) = A^2\left\{\left(\frac{a^2}{2}+\sigma_B^2\right)^2 + \frac{a^4}{4}\cos 2\omega_0\tau + 2a^2R_B(\tau).\cos\omega_0\tau + 2R_B^2(\tau)\right\}$$

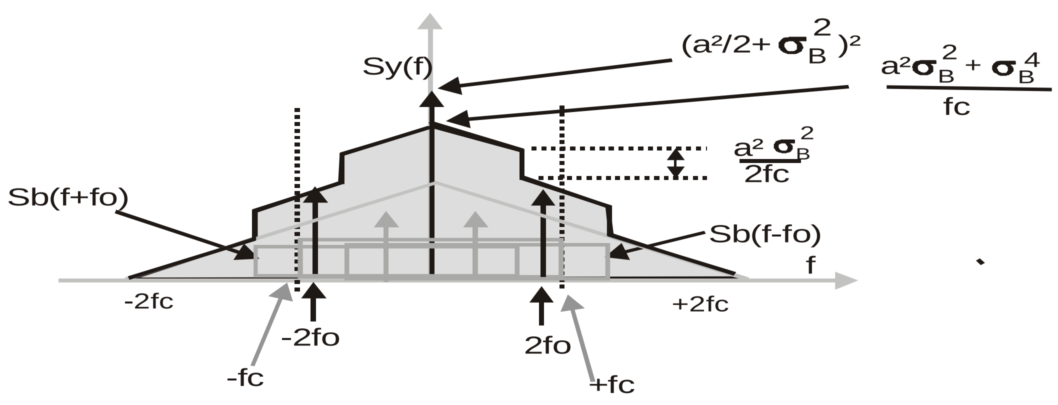
et par transformation de Fourier :

$$S_Y(f) = A^2\left\{\left(\frac{a^2}{2}+\sigma_B^2\right)\delta(f) + \frac{a^4}{8}\left[\delta(f-2f_0)+\delta(f+2f_0)\right] + a^2[S_B(f-f_0)+S_B(f+f_0)] + 2S_B(f)\otimes S_B(f)\right\}$$

Le terme à l'origine est la puissance totale de x somme de celles de s et de b , le second les deux raies attentues à ±2fc , le dernier le produit de convolution précédent , le troisiéme est du à la non linéarité il correspond à l'interraction sur cette non linéarité des deux composantes de x .

Le spectre obtenu à alors la forme inattendue ci dessous .

Spectre à la sortie d'un quadrateur attaqué par une sinusoïde noyée dans un bruit blanc filtré gaussien .



Cas du bi-quadrateur y=x⁴

On ne peut pas le considérer comme la mise en série de 2 quadrateurs car le signal se sortie du premier n'est pas gaussien. Le calcul direct est très laborieux car le développement de

$$\overline{x^4 x'^4} = \overline{xxxxx'x'x'x'}$$

fait intervenir 105 termes en x et x'
Il existe heureusement un théorème qui permet de résoudre ce problème .

Théorème de Price

Ce théorème à l'énoncé très bizarre est démontré en annexe .Il s'applique à toute non linéarité indépendante du temps du type

$$y = f(x)$$

Son énoncé est résumé par la formule suivante :

$$\frac{\partial^K R_Y}{\partial R_X^K} = E.\left\{ f^{(K)}[x(t)].f^{(K)}[x(t-\tau)] \right\}$$

il fait intervenir les dérivées de Ry par rapport à celles de Rx à tous les ordres. Ce théorème est surtout commode lorsque $f(x)=Ax^n$., pour le quadrateur :

$$f(x) = Ax^2 \quad donc \quad f^{(1)}[f(x)] = 2Ax$$

Alors au premier ordre le théorème de Price donne :

$$\frac{dR_Y}{dR_X} = 4A^2\overline{x(t)x(t-\tau)} = 4A^2 R_X(\tau)$$

qui s'intègre directement en : $R_Y(\tau) = 2A^2 R_X^2(\tau) + Cte$
La constante est déterminée en faisant tendre τ vers l'infini. En effet pour un tel retard x(t) et x(t-τ) ne sont plus corrélés c'est à dire $R_X(\infty) = 0$,alors $R_Y(\infty) = 2A^2 x0 + Cte$
Mais l' indépendance permet de casser la moyenne :

$$\overline{xxx'x'} = \overline{xx}.\overline{x'x'} = \sigma_X^4$$

donc $R_Y(\infty) = A^2\sigma_X^4$ c'est la valeur de la constante précédente .On retrouve bien le résultat précédent.

Pour un degré plus élevé des constantes apparaissent à chaque étape de l'intégration mais on peut n'en calculer que 2 en faisant tendre τ vers l'infini ou 0.Une attaque directe n'est donc pas possible,. Par exemple pour le bi-quadrateur il faut utiliser le théorème à l'ordre 2 et non 3 comme on pourrait le penser au vu des dérivées.

Soit $y=x^4$ $\quad \frac{dy}{dx} = 4x^3 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 24x$

Au second ordre :

$$\frac{d^2R_Y}{dR_X^2} = 144\overline{x^2(t).x^2(t-\tau)} = 144\left[\sigma_X^4 + 2R_X^2(\tau)\right]$$ d'après le résultat précédent .

qui s'intègre en 2 étapes

$$R_Y(\tau) = 24R_X^4(\tau) + 72\sigma_X^4 R_X^2 + C_1 R_X + C_2$$

Si τ tend vers l'infini $R_x(\tau)$ est nul comme on l'a vu plus haut Mais alors

$$R_Y = \overline{xxxxx'x'x'x'} = \overline{xxxx}.\overline{x'x'x'x'}$$

avec pour un signal gaussien : $\overline{xxxx} = 3\overline{xx}.\overline{x'x'} = 3\sigma_X^4$

Il vient $R_Y(\infty) = 9_X^8$

Donc : $9\sigma_X^8 = 24.0 + 72\sigma_X^2.0 + C_1.0 + C_2 \qquad C_2 = 9\sigma_X^8$

Mais pour τ=0 $R_Y(0)=\overline{xxxxxxxx}=105.\sigma_X^8$ et $R_X(0)=\sigma_X^2$
En reportant dans l'expression il vient finalement

$$R_Y(\tau)=24.R_X^4(\tau)+72.\sigma_X^4.R_X^2(\tau)+9.\sigma_X^8$$

On pourra traiter de la même façon le cas $y=x^3$

Ecrêteur parfait : propriété fondamentale des signaux gaussiens

L'écrêteur parfait est défini par y = Sign(x)
Or nous avons vu que l'on pouvait définir une dérivée :

$$\frac{dsign(x)}{dx}=2\delta(x)$$

Le théorème de Price donne alors au premier ordre :

$$\frac{dR_Y}{dR_X}=4.\overline{\delta[x(t)]\delta[x(t-\tau]}$$

En posant $x(t)=x_1$ et $x(t-\tau)=x_2$ ceci devient pour un signal ergodique

$$\frac{dR_Y}{dR_X}=4.E[\delta'(x_1).\delta(x_2)]$$

que l'on calcule en faisant intervenir les densités de probabilités :

$$E[\delta(x_1).\delta(x_2)]=\iint\delta(x_1).\delta(x_2)\,p(x_1x_2)dx_1dx_2\ =\ p(00)$$

mais pour un processus gaussien à 2 dimensions :

$$p(x_1x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\frac{R_X^2}{\sigma_X^4}}}\exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\frac{R_X}{\sigma_X^2}}{2\sigma_x^2(1-\frac{R_X^2}{\sigma_X^4})}\right)$$

donc

$$p(0,0)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_X^4-R_X^2}}$$

En reportant plus haut :

$$\frac{dR_Y}{dR_X}=\frac{2}{\pi\sqrt{\sigma_X^4-R_X^2}}$$

équation différentielle bien connue en terminale $R_Y(\tau)=\frac{2}{\pi}.\arcsin\frac{R_X(\tau)}{\sigma_X^2}+Cte$

La constante est nulle car pour τ tendant vers l'infini y(t) et y(t-τ) sont indépendants .
Cette formule est inutilisable pour calculer le spectre car cela ferait intervenir la transformée de Fourier d'un arcsin , mais elle est inversible .On en tire en effet :

$$R_X(\tau)=\sigma_X^2.\sin\left(\frac{\pi}{2}R_Y(\tau)\right)$$

Il est donc possible en théorie, à une constante multiplicative près , de calculer Rx donc le spectre de puissance du signal d'entrée , à partir de Ry c'est à dire le signal de sortie . D'ou le résultat fondamental :

Les caractéristiques spectrales d'un signal gaussien sont entièrement déterminées par ses passage par zéro.